

УДК 621.86

<https://elibrary.ru/jwcpit>

jwcpit



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРАН-МАНИПУЛЯТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Медведев И. А.¹, Бургонутдинов А. М.¹, Домбровский И. В.²

¹ФГКВОУ ВО «Пермский военный институт войск национальной гвардии Российской Федерации», г. Пермь.

²ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Пермь.

Представлена математическая модель кран-манипуляторной установки, учитывающая пространственные колебания элементов конструкции при работе. Модель описывает взаимодействие основных функциональных элементов системы: шасси, домкраты и грунт. Разработан виртуальный прототип изделия с графическим интерфейсом, позволяющий корректировать структуру установки и изменять параметры математической модели.

Ключевые слова: кран-манипуляторная установка; математическая модель; пространственные колебания; виртуальная модель; динамические характеристики; шасси; домкраты; грунт.

Для цитирования: Медведев И.А., Бургонутдинов А. М., Домбровский И. В. Математическая модель кран-манипуляторной установки // Альманах Пермского военного института войск национальной гвардии Российской Федерации. Выпуск 3(19) (сентябрь 2025). С. 24–34.

MATHEMATICAL MODEL OF CRANE-MANIPULATOR INSTALLATION

Medvedev I. A.¹, Burgonutdinov A. M.¹, Dombrovsky I. V.²

¹FGKVOU VO «Perm Military Institute of the National Guard Troops of the Russian Federation», Perm.

²FGAOU VO «Perm National Research Polytechnic University», Perm.

A mathematical model of a crane-manipulator installation has been presented, taking into account spatial vibrations of structural elements during operation. The model describes the interaction of the main functional elements of the system: chassis, jacks, and ground. A virtual prototype of the product has been developed with a graphical interface, allowing to adjust the structure of the installation and modify the parameters of the mathematical model.

Keywords: crane-manipulator installation; mathematical model; spatial oscillations; virtual model; dynamic characteristics; chassis; jacks; ground.

Введение

В современном машиностроении наблюдается тенденция к усложнению технических конструкций. Когда в механическую систему интегрируются такие компоненты как чувствительные датчики, энергетические источники, исполнительные механизмы и компьютерные системы управления, формируется комплексная структура – гибридная система. В такой системе происходит постоянный обмен информационными и энергетическими потоками между всеми элементами.

Создание подобных интегрированных систем требует детального анализа и исследования динамических процессов, которые в них происходят. Особенно важно это учитывать при разработке сложных технических комплексов. Ярким примером такой

гибридной системы служит крановая установка со специальным оборудованием для поддомкрачивания, где все компоненты работают как единое целое, обеспечивая эффективное функционирование всей конструкции (рисунок 1).

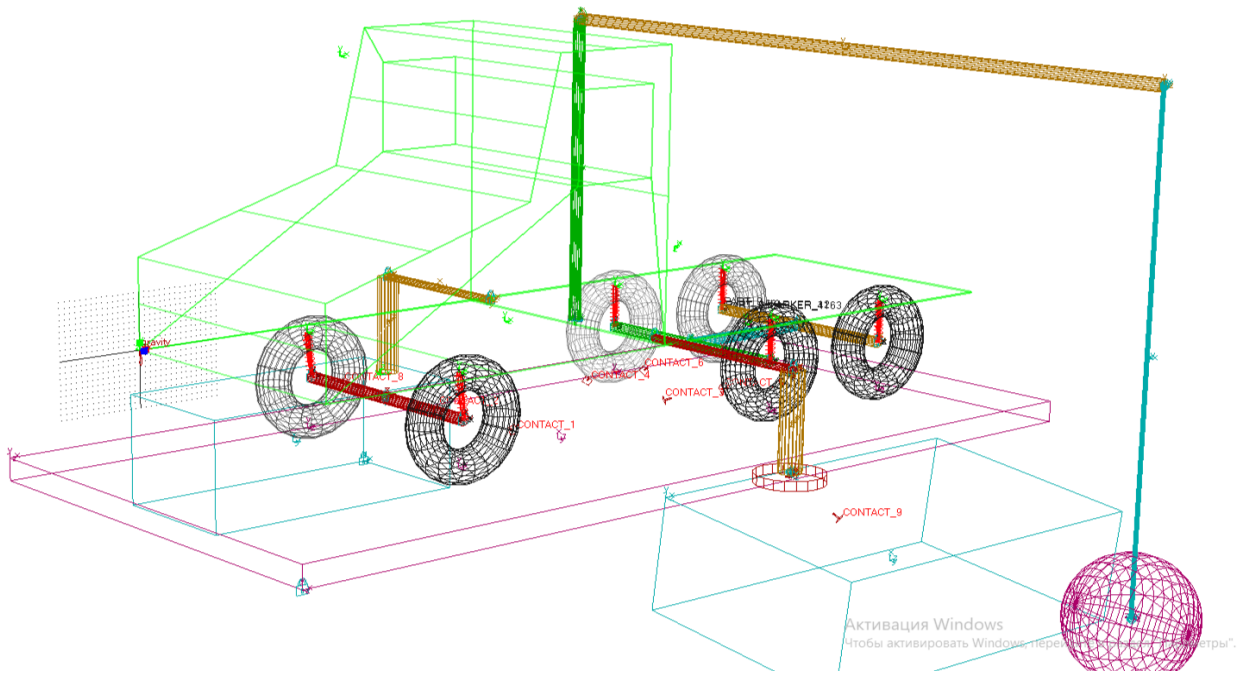


Рисунок 1 – Модель кран-манипуляторной установки на базе шасси УРАЛ-4320

Основная часть

Описание кинематической схемы.

Механическая структура системы включает в себя десять элементов, которые представляют собой абсолютно твердые тела. К ним относятся: база, передняя ось, задняя ось, четыре колеса, крановая установка, домкраты.

Все эти элементы формируют неизменяемую часть системы (рисунок 2).

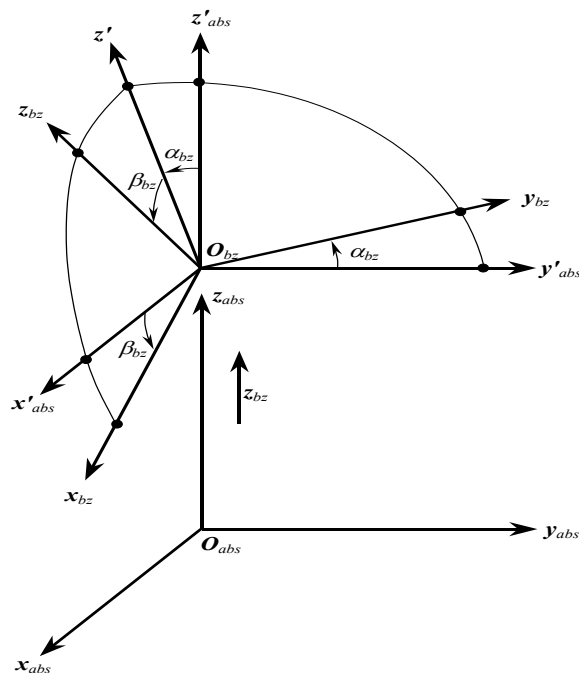


Рисунок 2 – Кинематическая схема механической системы с координатными осями

База (обозначение BZ) осуществляет движение относительно абсолютной системы координат. Система координат, связанная с базой, определена следующим образом:

– начало координат (Obz) находится в центре масс на продольной оси симметрии базы;

– ось Oy направлена от кормы к кабине вдоль продольной оси симметрии;

– ось Ox ориентирована к правому борту;

– ось Oz направлена вертикально вверх.

База выполняет три типа относительных перемещений:

– поступательное движение по оси Oz (z);

– поворот вокруг оси Ox на угол α (дифферент);

– поворот вокруг оси Oy на угол β (крен).

Эти перемещения используются как обобщенные координаты базы (z, α, β).

Абсолютная система координат расположена на уровне земли под системой координат базы (смещение только по оси Oz). В начальный момент времени её оси параллельны осям системы координат, связанной с базой.

Передняя и задняя оси (второе и третье тела) выполняют вертикальные перемещения и угловые движения относительно базы. Для каждой оси система координат определена так:

– начало координат (Ons) находится в центре масс соответствующей части;

– при нулевых обобщенных координатах оси системы параллельны осям системы координат базы.

Оси выполняют следующие малые относительные перемещения:

– перемещение по оси y ;

– поворот вокруг оси Ox на угол α (дифферент);

– поворот вокруг оси Oy на угол β (крен).

Четвертый элемент представляет собой крановую установку, которая крепится к базовой платформе в точке Ons . Данное устройство способно выполнять подъем и поворот груза относительно точки крепления к основанию.

Пятый элемент включает в себя домкраты, которые жестко соединены с базой. На домкраты монтируются тарельчатые элементы, причем их крепление может быть реализовано двумя способами: жестким или сферическим.

Колеса прочно зафиксированы как на передней, так и на задней осях. Для каждого колеса определена собственная система координат, чьи оси располагаются параллельно соответствующим осям базовой системы координат.

На центр масс каждого элемента системы действует сила тяжести, направленная вертикально вниз по оси Oy в абсолютной системе координат.

Подвеска моделируется с помощью упругодемпфирующих сил, которые приложены к базе и осям параллельно плоскости Oxy . Эти силы характеризуются кусочно-постоянными коэффициентами жесткости и демпфирования. Взаимодействие колес с грунтом также описывается упругодемпфирующими контактными силами, чьи параметры зависят от давления в колесах и свойств грунта.

Модель учитывает возможность отделения колес и домкратов от поверхности грунта во время работы системы, что происходит при подъеме базы на домкратах или при функционировании крановой установки.

По всем угловым степеням свободы действуют упругодемпфирующие моменты с постоянными коэффициентами жесткости и демпфирования. Данные моменты позволяют описать изгибную жесткость конструкции, а также удерживающие моменты в поворотных и подъемно-уравновешивающих механизмах [1, 2].

Моделирование движения изделия с применением избыточных квазиординат

В рамках данного исследования изделие представляется как комплексная система, состоящая из взаимосвязанных механических подсистем (рисунок 3). Такой системный подход позволяет выделить два ключевых элемента в структуре любой механической системы: собственно механические подсистемы и физические соединения, обеспечивающие их взаимодействие.

Данный метод анализа позволяет учитывать все компоненты изделия как единую механическую систему, где каждая подсистема и способ её соединения с другими элементами играют важную роль в общем функционировании конструкции. Такой подход особенно эффективен при моделировании сложных технических объектов, где необходимо учитывать множественные взаимодействия между различными элементами конструкции.

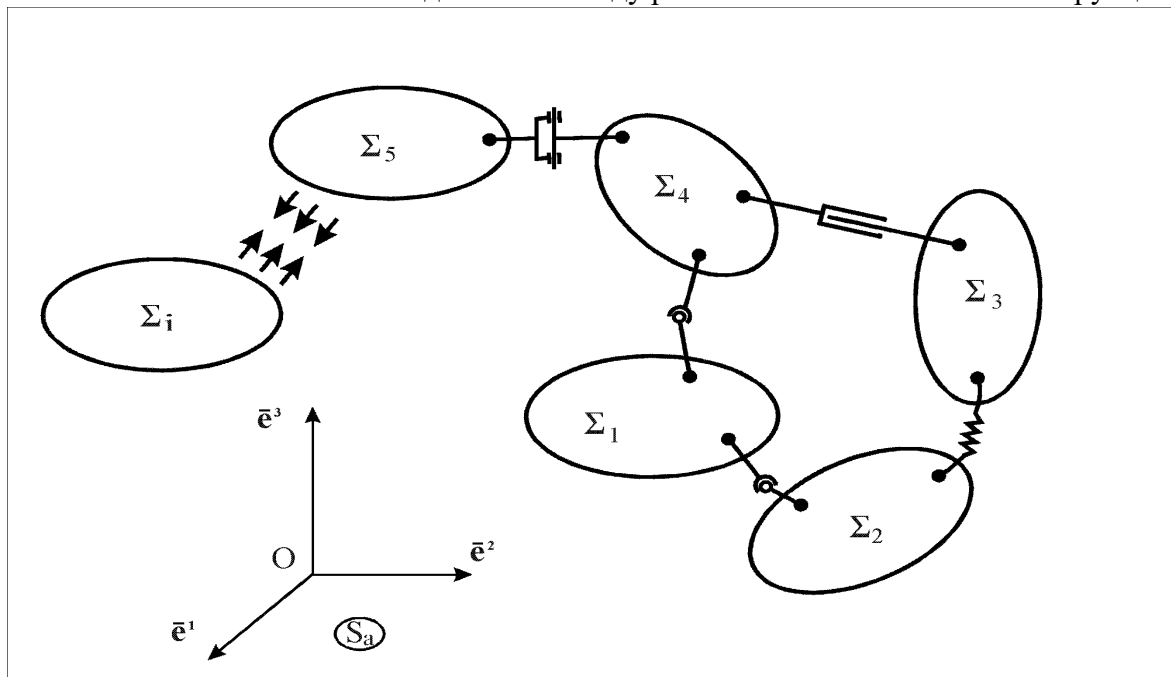


Рисунок 3 – Комплексная система взаимосвязанных механических подсистем

Две подсистемы считаются смежными при наличии между ними прямого силового взаимодействия, что образует их соединение. Такое взаимодействие может происходить как с кинематическими ограничениями взаимного положения и скоростей подсистем, так и без них (через силовые элементы и поля). Ограничения первого типа определяются как связи.

Для каждой механической связи существует набор условий, выражаемых алгебраическими или дифференциальными уравнениями, которые учитывают параметры состояния обеих подсистем, включая их координаты, скорости и характеристики относительного движения в сочленениях.

Рассматриваются как внутренние связи между подсистемами, так и внешние – между подсистемами и окружающей средой. Объединение этих компонентов позволяет создать целостную модель, точно воспроизводящую механические характеристики системы.

Положение системы описывается набором n обобщенных координат q_1, \dots, q_n , учитывающих внутренние и внешние связи. Полное описание состояния требует дополнения координат характеристиками распределения скоростей: либо обобщенными скоростями, либо кинематическими параметрами с размерностью скорости. При наличии неголономных связей и m степеней свободы (где $m < n$) достаточно m характеристик для описания поля скоростей.

Ключевым аспектом моделирования является определение структуры системы – совокупности связей между элементами. Кинематическая структура характеризуется количеством подсистем, порядком и способом их взаимодействия. Важно отметить, что кинематическая структура многих реальных систем может изменяться в процессе работы (например, при захвате объектов манипуляторами или изменении контакта домкрата с грунтом).

Механические системы классифицируются по порядку взаимодействия подсистем: простые цепочки, системы с древовидной структурой и системы с замкнутыми кинематическими цепями. Моделирование первых двух типов хорошо формализовано, а системы с замкнутыми цепями могут быть преобразованы в древовидные путем разрезания

определенных соединений с последующим учетом внутренних сил и кинематических связей в уравнениях движения.

В основе метода декомпозиции сложных механических систем на подсистемы лежат классические модели абсолютно твердого тела. Рассмотрим задачу построения моделей кинематики и динамики абсолютно твердого тела, совершающего относительное движение [3].

Рассмотрим движение абсолютно твердого тела V_i относительно подвижной системы координат S_0 . Свяжем с телом V_i систему координат S_i с центром в точке O_i .

Распределение скоростей и ускорений точек произвольно выбранного тела V_i системы определяется векторными соотношениями:

$$\bar{v}_i^P = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i, \quad (1)$$

где \bar{v}_i^P – вектор абсолютной скорости произвольной точки P тела V_i ;

\bar{v}_i – вектор абсолютной скорости полюса O_i ;

$\bar{\omega}_i$ – вектор абсолютной угловой скорости тела V_i ;

$\bar{\rho}_i$ – радиус-вектор точки P в системе координат связанной с телом.

С учетом относительного характера движения твердого тела, для векторных величин \bar{v}_i , $\bar{\omega}_i$, определяющих распределение скоростей и ускорений, справедливы соотношения:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega}_0 \times \bar{r}_{0i} + \bar{v}_{ir}, \quad (2)$$

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{ir}, \quad (3)$$

$$\bar{v}_i^P = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i, \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_{ir} + \bar{\varepsilon}_{ir},$$

где \bar{v}_0 – вектор абсолютной скорости центра подвижной системы координат S_0 ;

$\bar{\omega}_0$ – вектор абсолютной угловой скорости системы координат S_0 ;

$\bar{\varepsilon}_0$ – вектор абсолютного углового ускорения системы координат S_0 ;

\bar{v}_{ir} – относительная скорость полюса O_i в системе координат S_0 ;

$\bar{\omega}_{ir}$ – относительная угловая скорость тела V_i относительно системы координат S_0 ;

$\bar{\varepsilon}_{ir}$ – относительное угловое ускорение тела V_i относительно системы координат S_0 .

Поскольку движение системы координат S_0 считаем известным, величины \bar{v}_0 , $\bar{\omega}_0$ являются заданными функциями времени.

Пусть обобщенные координаты тела V_i , однозначно определяющие положение тела относительно системы координат S_0 . Для свободного твердого тела $n_i = 6$. В случае, когда рассматриваемые тела системы ограничено связями, число таких координат может быть меньше шести. В общем случае будем полагать $n_i \leq 6$.

Кинетическая энергия твердого тела V_i имеет вид:

$$T_i = \frac{1}{2} \left(m_i \bar{v}_i^2 + 2 m_i (\bar{v}_i \times \bar{\omega}_i) \cdot \bar{r}_{ci} + \bar{\omega}_i \cdot \Theta_i^{O_i} \cdot \bar{\omega}_i \right), \quad (5)$$

где m_i – масса тела;

$\Theta_i^{O_i}$ – тензор инерции тела V_i , относительно точки O_i ;

\bar{r}_{ci} – радиус–вектор центра масс тела V_i относительно связанной системы координат.

Запишем кинетическую энергию тела в матричном виде:

$$T_i = \frac{1}{2} V_i^T M_i V_i \quad (6)$$

где M_i – блочная матрица:

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{r}_{ci} \\ m_i \tilde{r}_{ci} & \Theta_i^{O_i} \end{pmatrix}$$

Символ « \sim » над векторной величиной (например, \tilde{a}) здесь и далее будет обозначать кососимметричную матрицу, порожденную проекциями этого вектора на оси выбранной системы координат по формуле:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом (5) выражение для кинетической энергии можно представить в виде неоднородной квадратичной формы относительно обобщенных скоростей:

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}_i^T M_i \dot{\bar{q}}_i + \dot{\bar{q}}_i^T N_i + T_{i0}, \quad (7)$$

где

$$M_i = A_i^T M_i A_i, \quad N_i = A_i^T M_i a_i, \quad T_{i0} = \frac{1}{2} a_i^T M_i a_i.$$

Следует заметить, что при построении моделей твердого тела удобно использовать понятие квазискоростей, поскольку выражения для основных кинематических и динамических величин при этом имеют простую и наглядную структуру [6, 7].

Пусть вектор квазискоростей тела V_i , введенный таким образом, что квазискорости представляют собой линейные формы обобщенных скоростей:

$$\bar{\chi}_i = H_i^\circ \dot{\bar{q}}_i + h_i^\circ, \quad (8)$$

где элементы матриц H_i° и h_i° зависят в общем случае от обобщенных координат \bar{q}_i .

Соотношения (8) носят универсальный характер. Конкретный вид матриц H_i° , h_i° определяется выбором системы квазискоростей.

Пусть соотношению (8) соответствует обратное соотношение:

$$\dot{\bar{q}}_i = H_i \bar{\chi}_i + h_i, \quad (9)$$

Представим величины \bar{v}_i , $\bar{\omega}_i$, как линейные функции независимых величин таким образом, чтобы уравнения связей были тождественно удовлетворены:

$$V_i = C_i \bar{\chi}_i + c_i. \quad (10)$$

Очевидно, что представления (9) и (10) эквивалентны:

$$C_i = A_i H_i, \quad c_i = A_i h_i + a_i.$$

В общем случае кинетическая энергия может быть представлена в виде неоднородной квадратичной формы относительно квазискоростей:

$$\begin{aligned}
M_i^* &= C_i^T M_i C_i = H_i^T A_i^T M_i A_i H_i, \\
N_i^* &= C_i^T M_i c_i = H_i^T A_i^T M_i (A_i h_i + a_i), \\
T_{i0}^* &= \frac{1}{2} c_i^T M_i c_i = \frac{1}{2} (a_i^T + h_i^T A_i^T) M_i (A_i h_i + a_i). \\
T_i &= \frac{1}{2} \bar{\chi}_i^T M_i^* \bar{\chi}_i + \bar{\chi}_i^T N_i^* + T_{i0}^*,
\end{aligned} \tag{11}$$

Символ «*» означает, что при построении матриц обобщенные скорости были исключены с помощью соотношения (11).

Отметим, что структура выражения кинетической энергии через квазискорости, как правило, более простая, чем через обобщенные скорости [3, 5].

Пусть на тело действуют f_i внешних сил \bar{F}_{ij} , ($j = \overline{1, f_i}$). Пусть также в связанной системе координат точки приложения сил заданы радиус-векторами $\bar{\rho}_{ij}$, ($j = \overline{1, f_i}$). Тогда матрица-столбец обобщенных сил Q_i , выполняющих работу на виртуальных перемещениях обобщенных координат, вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
Q_i &= \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial r_{ij}^T}{\partial \bar{q}_i} F_{ij} = \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial v_{ij}^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} F_{ij} = \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial (v_i - \rho_{ij} \omega_i)^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} F_{ij} \\
&= \frac{\partial v_i^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \sum_{i=1}^{f_i} F_{ij} - \frac{\partial \omega_i^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \sum_{i=1}^{f_i} \tilde{\rho}_{ij} F_{ij}.
\end{aligned} \tag{12}$$

В результате:

$$Q_i = \frac{\partial v_i^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} F_i + \frac{\partial \omega_i^T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} m_{O_i}, \tag{13}$$

где F_i – матрица-столбец проекций главного вектора системы сил, приложенных к телу;

m_{O_i} – матрица-столбец проекций главного момента системы сил относительно точки O_i .

Введем в рассмотрение матрицу $P_i = (F_i^T, m_{O_i}^T)^T$. С учетом вышеизложенного соотношение (13) запишется в виде:

$$Q_i = \frac{\partial V_i}{\partial \dot{\bar{q}}_i} P_i = A_i^T P_i. \tag{14}$$

Рассмотрим вопрос о построении обобщенных сил, производящих работу при изменении квазиординат.

Пусть Π_i – матрица-столбец обобщенных сил, отнесенных к квазиординатам. Проведя выкладки, аналогичные (12), получим:

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial r_{ij}^T}{\partial \bar{\pi}_i} F_{ij} = \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial v_{ij}^T}{\partial \bar{\chi}_i} F_{ij} = \sum_{i=1}^{f_i} \frac{\partial (v_i - \rho_{ij} \omega_i)^T}{\partial \bar{\chi}_i} F_{ij} \\
&= \frac{\partial v_i^T}{\partial \bar{\chi}_i} \sum_{i=1}^{f_i} F_{ij} - \frac{\partial \omega_i^T}{\partial \bar{\chi}_i} \sum_{i=1}^{f_i} \tilde{\rho}_{ij} F_{ij} = \frac{\partial V_i^T}{\partial \bar{\chi}_i} P_i.
\end{aligned} \tag{15}$$

Окончательно, с учетом (10):

$$\Pi_i = C_i^T P_i = H_i^T A_i^T P_i. \quad (16)$$

Таким образом, обобщенные силы Π_i , отнесенные к квазикоординатам, связаны с обобщенными силами Q_i по формуле:

$$\Pi_i = \frac{\partial \bar{q}_i^T}{\partial \bar{z}_i} Q_i^* = H_i^T Q_i^*. \quad (17)$$

Обсуждение результатов

В результате проведенного исследования разработана комплексная математическая модель крановой установки, учитывающая взаимодействие всех основных функциональных элементов системы. Модель позволяет проводить пространственный анализ колебаний элементов конструкции в различных режимах работы, включая взаимодействие с грунтом через шасси и домкраты.

Математическая модель обеспечивает возможность определения:

- параметров колебаний элементов и усилий в узлах машины, в том числе параметров колебаний центра масс, силового взаимодействия домкратов и грунта при движении груза по различным направлениям;

- влияния взаимодействия колес и домкратов с грунтом при различных условиях работы изделия.

В пакете MSC.ADAMS разработан виртуальный прототип изделия с графическим интерфейсом (рисунок 1), в котором учитывается пространственная переменная структура многомассовой механической системы. В пакете, реализующем математическую модель изделия, предусмотрена возможность корректировки структур изделия, изменения параметров и коэффициентов математической модели [8].

Заключение

Проведены расчеты и представлены результаты моделирования работы крановой установки без учета типа и осадки грунта (рисунки 4–7):

- при вывешивании машины на домкраты;
- при работе изделия с различными грузами и режимами работы.

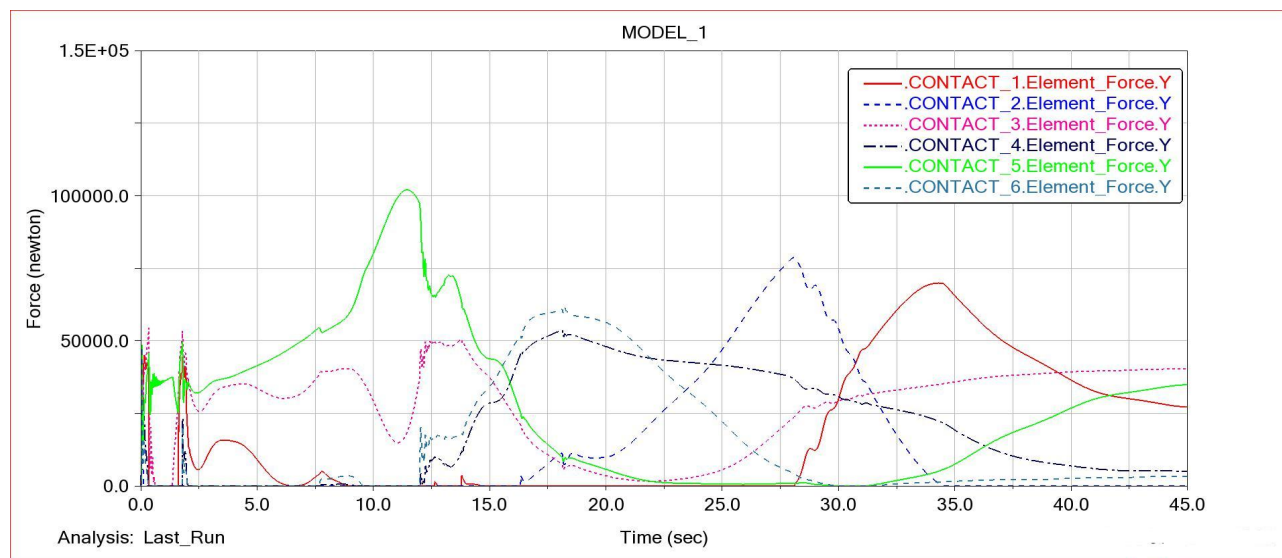


Рисунок 4 – Контакт колес с грунтом при подъеме и перемещении груза

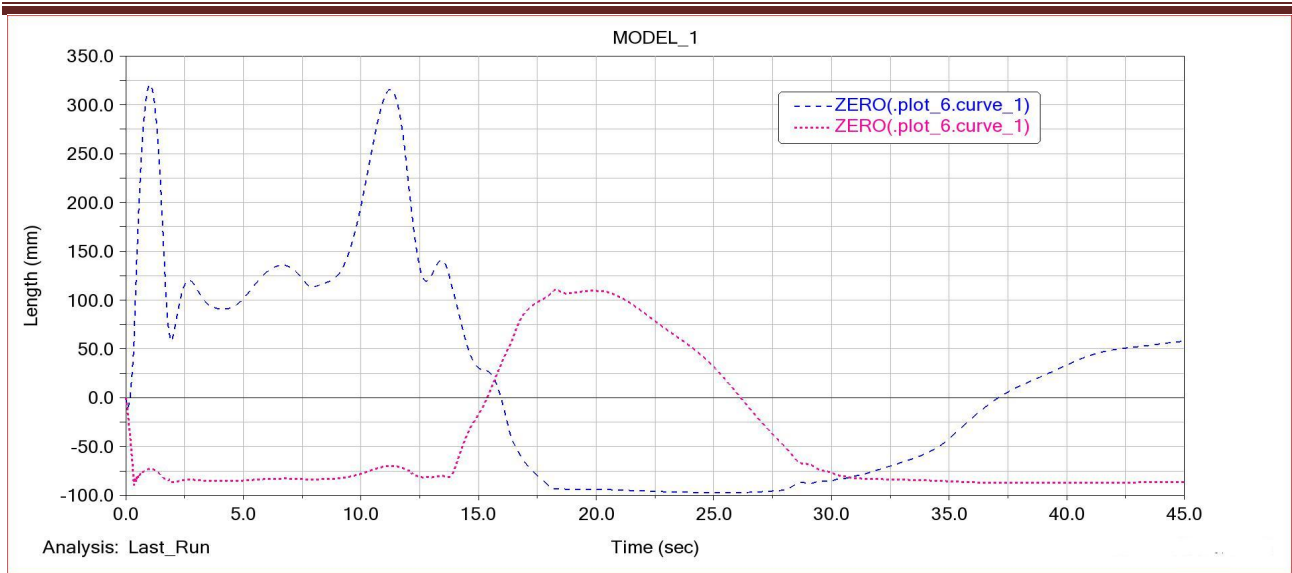


Рисунок 5 – Смещение аутригеров при подъеме и перемещении груза

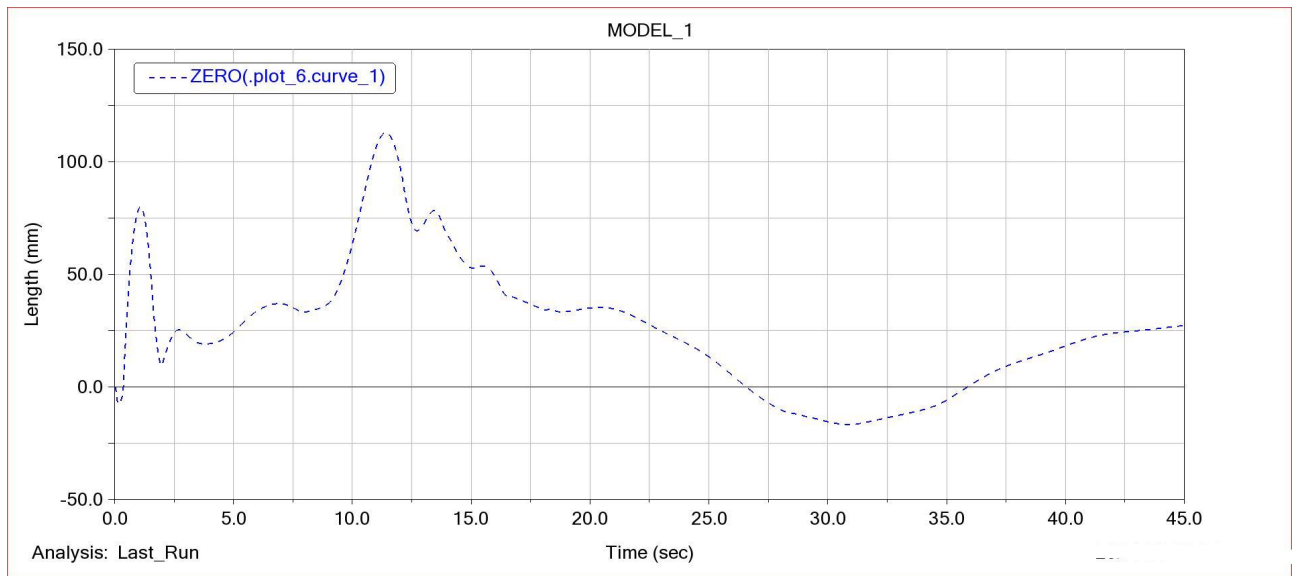


Рисунок 6 – Перемещение центра масс при подъеме и перемещении груза

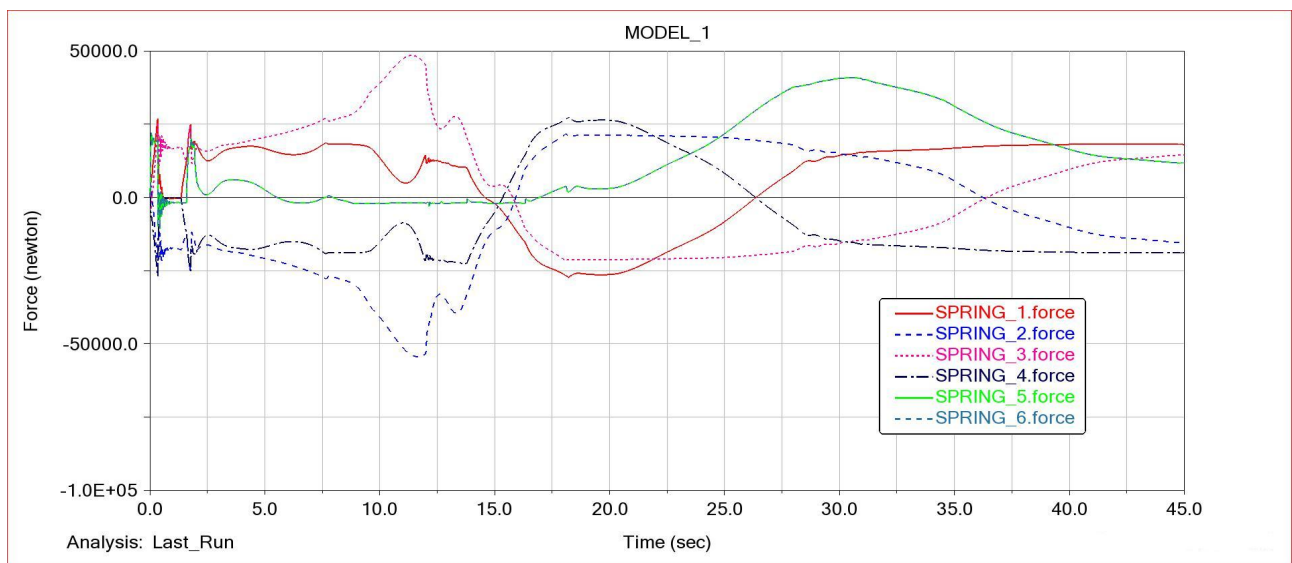


Рисунок 7 – Усилия в подвеске при подъеме и перемещении груза

Результаты, полученные при использовании виртуального прототипа модели в пакете MSC.ADAMS могут быть использованы при отработке машины, а также определения

безопасных режимов работы и условий эксплуатации.

Библиографический список

1. Александров, В. А. Теория механизмов и машин / В. А. Александров, В. В. Дробышева. – Москва: Высшая школа, 2019. – 320 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – Москва: Наука, 2020. – 632 с.
3. Коренько, А. С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / А. С. Коренько. – Москва: Высшая школа, 2018. – 320 с.
4. Мехонин, О. Н. Анализ влияния конструкционных особенностей выносных опор автомобильного крана-манипулятора на коэффициент грузовой устойчивости / О. Н. Мехонин, К. Г. Пугин, Р. В. Щеткин // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. – 2022. – № 4. – С. 37–43. – DOI 10.15593/24111678/2022.04.04. – EDN YNGCPH.
5. Попов, Д. Н. Теория механизмов и машин / Д. Н. Попов, И. И. Иванов. – Москва: Высшая школа, 2019. – 528 с.
6. Пугин, К. Г. Расширение технологических возможностей автомобильных кранов-манипуляторов за счет уточнения коэффициента грузовой устойчивости / К. Г. Пугин, О. Н. Мехонин // Архитектурно-строительный и дорожно-транспортный комплексы: проблемы, перспективы, инновации: Сборник материалов VII Международной научно-практической конференции, приуроченной к проведению в Российской Федерации Десятилетия науки и технологий, Омск, 24–25 ноября 2022 года. – Омск: Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ), 2022. – С. 46–49. – EDN KDOXLP.
7. Чернавский, С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / С. А. Чернавский. – Москва: Машиностроение, 2020. – 416 с.
8. MSC.ADAMS: руководство пользователя. Версия 2023. – MSC Software Corporation, 2023. – 850 с.

Контактная информация:

Медведев Илья Анатольевич – medvedkras@yandex.ru

Бургонутдинов Альберт Масугутович – burgonutdinov.albert@yandex.ru

Домбровский Игорь Викторович – dombrovskii1960@mail.ru

References

1. Alexandrov, V. A. Theory of Mechanisms and Machines / V. A. Alexandrov, V. V. Drobysheva. – Moscow: Vysshaya Shkola, 2019. – 320 p.
2. Artobolevsky, I. I. Theory of Mechanisms and Machines / I. I. Artobolevsky. – Moscow: Nauka, 2020. – 632 p.
3. Korenyako, A. S. Course design in the theory of mechanisms and machines / A. S. Korenyako. – M.: Higher school, 2018. – 320 p.
4. Mekhonin, O. N. Analysis of the influence of the design features of the outriggers of the automobile crane-manipulator on the coefficient of cargo stability / O. N. Mekhonin, K. G. Pugin, R. V. Shchetkin // Transport. Transport structures. Ecology. – 2022. – No. 4. – Pp. 37–43. – DOI 10.15593/24111678/2022.04.04. – EDN YNGCPH.
5. Popov, D. N. Theory of Mechanisms and Machines / D. N. Popov, I. I. Ivanov. – Moscow: Vysshaya Shkola, 2019. – 528 p.
6. Pugin, K. G. Expanding the Technological Capabilities of Mobile Cranes by Clarifying the Cargo Stability Coefficient / K. G. Pugin, O. N. Mekhonin // Architectural, Construction, and Road Transport Complexes: Problems, Prospects, and Innovations: Collection of Materials from the 7th International Scientific and Practical Conference Dedicated to the Decade of Science and

Technology in the Russian Federation, Omsk, November 24–25, 2022. – Omsk: Siberian State Automobile and Road University (SibADI), 2022. – Pp. 46–49. – EDN KDOXLP.

7. Chernavsky, S. A. Course Design in the Theory of Mechanisms and Machines / S. A. Chernavsky. – Moscow: Mechanical Engineering, 2020. – 416 p.

8. MSC.ADAMS: User Manual. Version 2023. – MSC Software Corporation, 2023. – 850 p.

Contact information:

Medvedev Ilya Anatolyevich – medvedkras@yandex.ru

Burgonutdinov Albert Masugutovich – burgonutdinov.albert@yandex.ru

Dombrovskii Igor Viktorovich – dombrovskii1960@mail.ru